En este capítulo se discutirán algunas de las propiedades de las funciones continuas, que se usan con frecuencia.

Muchas de ellas aparecen como triviales cuando se interpretan geométricamente, por lo que algunos se inclinan a aceptarlas como evidentes.

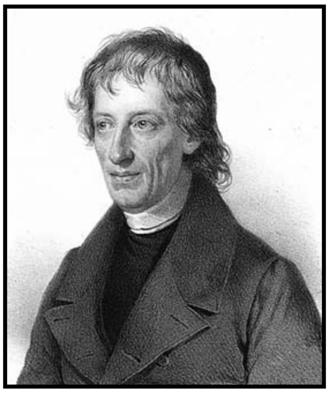
Sin embargo, es importante poner de manifiesto que estas propiedades no tienen en sí una evidencia superior a la misma definición de continuidad y que, por tanto, han de ser demostradas si se quiere aplicarlas con cierta generalidad.

Bernard Bolzano, sacerdote católico que hizo aportaciones importantes a las matemáticas en la primera mitad del siglo XIX, fue uno de los primeros en reconocer que muchas de las propiedades sobre funciones continuas que parecían obvias requerían una demostración.

Sus demostraciones referentes a continuidad fueron publicadas en 1850, en su importante obra póstuma *Paradojas del infinito*.

Bernard Bolzano

(Checoslovaquia, 1781-1848)



Bolzano fue un filósofo, matemático y teólogo, quien hizo significativas contribuciones tanto a las matemáticas como a la teoría de la ciencia. En algunos aspectos constituye un interesante precedente de la lógica matemática.

Siendo sacerdote católico, en 1805 fue puesto como máximo exponente de la filosofía y la religión en Praga. Sin embargo, en 1819 Bolzano fue suspendido de su posición a causa de la presión del gobierno austriaco, que se oponía a su pacifismo y su expresión de la justicia económica.

Bolzano se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX en el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series, y en la existencia de funciones continuas sin derivadas. Pero la influencia de sus ideas fue escasa, por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o por permanecer inéditos, como su importante teoría de funciones, que apareció en 1930.

Su principal trabajo, *Paradojas del infinito*, fue publicado en 1850, después de su muerte.

En este trabajo se reconocía por primera vez que muchos enunciados aparentemente obvios sobre funciones continuas pueden y deben ser demostrados.

6

TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

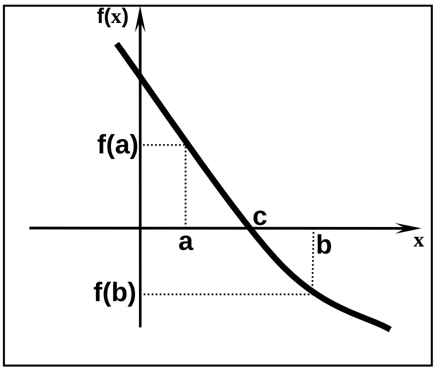
Un matemático que no tenga algo de poeta, nunca será un matemático completo.

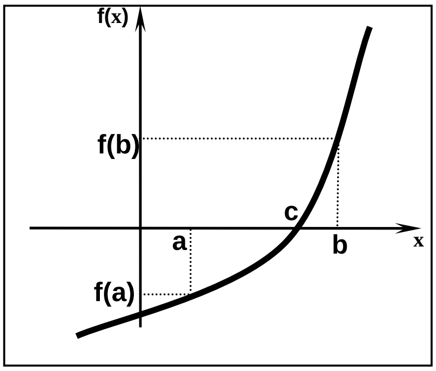
K.Weierstrass
(Alemania,
1815-1897)

1 – TEOREMA DE BOLZANO (Existencia de ceros)

1.1. INTRODUCCIÓN

Muchas de las propiedades de las funciones continuas parecen triviales cuando se interpretan geométricamente. Bernard Bolzano fue uno de los primeros en reconocer que muchas de estas propiedades, que parecían obvias, requerían una demostración rigurosa. Uno de sus resultados, conocido como el teorema de Bolzano, se pone de manifiesto en la siguiente figura, donde se muestra la representación gráfica de una función continua. La representación gráfica se encuentra por encima del eje $\overrightarrow{ox}$, en $x = a$ y por debajo del eje $\overrightarrow{ox}$ en $x = b$, o al revés. El teorema de Bolzano afirma que la curva ha de cortar al eje $\overrightarrow{ox}$ por lo menos una vez entre **a** y **b**.





Para nuestra intuición geométrica, el teorema es trivial pues expresa simplemente que una curva continua que comienza debajo del eje $\overrightarrow{ox}$ y termina encima de él, o recíprocamente, debe cortarlo al menos una vez en algún $c \in (a, b)$, o sea que: $f(c) = 0$.

1.2. TEOREMA DE BOLZANO

Si una función **f** *es continua en un intervalo cerrado* $[\mathbf{a, b}]$, *y* **f(a)** *y* **f(b)** *son de signo contrario, existe por lo menos un* **c** *perteneciente al intervalo abierto tal que* **f(c) = 0**.

Hipótesis: **f** es continua en $[a, b]$ $\quad f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesis: existe $c \in (a, b) \ / \ f(c) = 0$

Para la demostración se supondrá que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$.

Sea **S** el conjunto de valores de $x \in [a, b]$ donde $f(x) \leq 0$.

S es un conjunto no vacío, porque $a \in S$ (dado que $f(a) < 0$); además **S** está acotado superiormente por **b**, pues si $x \in S \Rightarrow x \in [a, b] \Rightarrow x \leq b$. Por lo tanto, **S** tiene extremo superior.

Sea **c** el extremo superior de **S**. Se pueden dar tres casos:

$f(c) < 0 \qquad f(c) = 0 \qquad f(c) > 0$

- Si $f(c) > 0$

Existe un entorno de **c** $(c - \delta,\ c + \delta)$, o $(c - \delta,\ c)$ si $c = b$, tal que para todo $x \in E(c, \delta)$ $f(x) > 0$, según el teorema de conservación del signo de límites y la continuidad de **f** en $[a, b]$. Por lo tanto, ningún valor del conjunto **S** $(f(x) < 0)$ puede estar a la derecha de $c - \delta$, con lo cual $c - \delta$ sería una cota superior de **S**, menor que su extremo superior **c**. Es absurdo. En conclusión, **f(c)** no puede ser positivo.

Teorema de Bolzano

En la enseñanza media se ha demostrado el teorema de Bolzano de dos formas distintas.

Una exige conocer sucesiones y par de sucesiones monótonas convergentes, que aunque tiene la ventaja de proporcionar el método práctico para aproximar ceros, ya no se enseña en los cursos de enseñanza media.

El otro método se basa en conceptos de extremo superior, que cada vez se está trabajando más en este curso.

- Si $f(c) < 0$

Por el teorema de conservación del signo y la continuidad de **f** en $[a, b]$, existe un entorno de **c** $(c - \delta,\ c + \delta)$, o $(c,\ c + \delta)$ si $c = a$, tal que para todo $x \in E(c, \delta)$ $f(x) < 0$. Es absurdo, pues entonces habría un valor $f(x) < 0$ para algún $x > c$, lo cual es imposible ya que **c** es extremo superior de **S**.

De esta manera se concluye que **f(c) = 0.**

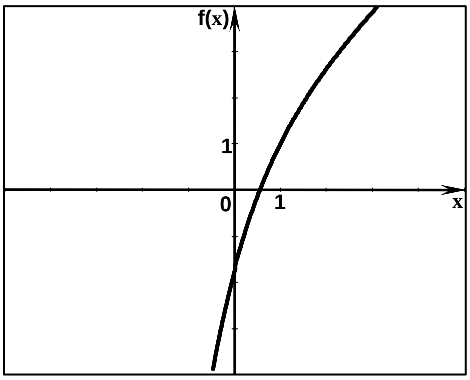
NOTA

El teorema asegura que existe al menos un **c**$\in$(**a, b**) **tal que f(c) = 0**. Pero este puede no ser único. Pueden haber otros valores dentro o fuera del intervalo que anulen la función.

Conviene observar que el teorema de Bolzano es un teorema de existencia, por lo que nos garantiza la existencia del cero, pero no nos dice cuál es, ni cuántos ceros hay.

También es importante señalar que todas las hipótesis del teorema son esenciales para la existencia del cero, incluida la continuidad de **f** en los extremos del intervalo.

EJEMPLO: Sea $f: f(x) = x + 1 - e^{(1-x)}$ ¿**f** tiene algún cero en $[0, 1]$?



La función propuesta es continua en el intervalo considerado. Es necesario calcular los valores en los extremos del intervalo, para ver si se cumple con la hipótesis del teorema de Bolzano.

$$f(0) = 0 + 1 - e^{(1-0)} = 1 - e \; \mathbf{< 0}$$

$$f(1) = 1 + 1 - e^{(1-1)} = 1 \; \mathbf{> 0}$$

Cumple con la hipótesis del teorema de Bolzano, entonces tiene un cero en $(0, 1)$.

Para aproximar el cero, véase la página 256.