To be or not to be

En la antigüedad, el concepto de *número* **surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos. Para ello, al principio el hombre se valió de los elementos de que disponía a su alrededor: dedos, piedras... Basta recordar, por ejemplo, que la palabra** *cálculo* **deriva de la palabra latina** *calculus,* **que significa 'contar con piedras'. La serie de números naturales era, obviamente, limitada; pero la conciencia sobre la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales, representaba ya una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna. Paralelamente a la ampliación de los conjuntos numéricos, se desarrollaron su simbología y los sistemas de numeración diferentes para cada civilización.**

Fue en la India –entre los siglos V y XII d. C.– donde se empezaron a usar correctamente los números negativos, se introdujo el cero e incluso se llegó a aceptar como válidos los números irracionales. Es indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y de las reglas de cálculo.

El cero ¿es o no un número natural?

Giuseppe Peano
(Italia, 1858-1932)

Este es uno de los temas de más frecuente discusión entre quienes se dedican a las matemáticas. Cuando Peano introdujo los axiomas para definir el conjunto de los números naturales, inició este conjunto por el número uno. Pero cuando Cantor estudió la teoría de conjuntos, encontró que debía empezar por el cero, dada la necesidad de asignarle un cardinal al conjunto vacío. Quizá fue esto lo que hizo que, diez años más tarde, Peano empezara los números naturales con el cero.

En las últimas décadas ha sido muy popular la teoría de conjuntos, lo cual justifica que muchos profesores prefieran comenzar el conjunto de los números naturales por el cero.

En este texto se elige iniciar el conjunto de los números naturales por el cero, pues es necesario para el cardinal del conjunto vacío, para el neutro de la suma y para tantas otras aplicaciones.

Pero en algunos temas, como el de las *sucesiones*, **se indicará como $\mathbb{N}^*$ a los números naturales sin el cero, pues es normal que se relacione el primer término con el número uno, el segundo término con el número dos y así sucesivamente, recordando que no hay un** *ordinal* **para el** *cardinal* **cero.**

Georg Cantor
(Rusia, 1854-1918)

2

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1 – INTRODUCCIÓN

En la práctica diaria del estudio de las matemáticas se ha visto que, mediante el razonamiento y la formulación de teoremas, se pueden deducir nuevas proposiciones de otras ya establecidas, las que a su vez deben de haber sido deducidas de otras anteriores, mediante otros teoremas.

Pero, en todo caso, se ha de partir siempre de unas primeras proposiciones, que deben aceptarse sin demostración pues, en caso contrario, no serían las primeras.

Toda teoría matemática parte de conceptos *iniciales* o *primitivos*. Se deben definir ciertos entes matemáticos, a partir de los cuales se construye la teoría.

Estos conceptos primitivos no se demuestran; simplemente se aceptan como verdaderos. Se llaman *axiomas*. Todos los teoremas y otros conceptos de esta teoría serán consecuencia lógica de los axiomas.

¿Tests de inteligencia?

Dada una tabla de números en la que falta uno. Se pide que diga qué número falta y que explique cómo llegó a ese resultado.

54	(117)	36
72	(154)	28
39	(513)	42
18	(¿?)	71

El test, supuestamente, consiste no sólo en que pueda determinar qué número debería ir en lugar de los signos de interrogación, sino también en medir su capacidad de análisis para deducir una ley de formación. Es decir: alguien pensó en un patrón que subyace tras la gestación de esos números, y pretende que usted lo descubra.

Me apresuro a decir que ninguno de estos métodos es fiable, ni mucho menos exacto. De hecho, habría y en general hay infinitas maneras de encontrar un número que ocupe el lugar del signo de interrogación. Se trata, en todo caso, de ser capaz de buscar el que pensaron los que diseñaron el test.

Trate de entrenarse haciendo este tipo de tests y verá cómo al final le salen todos, o casi todos. Ése será el momento en que quizá crea que es más inteligente. Lo curioso es que tal vez haya aprendido a *someterse mejor* al pensamiento oficial.

Pretender usar la matemática como un testeador de la inteligencia puede producir un efecto no sólo negativo y frustrante, sino falso. Aunque más no sea porque no se sabe qué se mide.

Extraído de:
Paenza, A. (2006).
Matemática... Estás ahí? Episodio 2
Argentina: Siglo veintiuno editores.

2 – NÚMEROS NATURALES

Mediante los axiomas de Peano, un conjunto $\mathbb{N}$ llamado *números naturales*, un elemento llamado cero, y una relación primitiva **sg** (siguiente de), quedan definidos axiomáticamente como:

1 – Cero es un número natural.

2 – A cada número natural le corresponde un número natural siguiente a él, unívocamente determinado (si $\mathbf{x} \in \mathbb{N}$ sg $\mathbf{x} \in \mathbb{N}$) ($\in$ significa 'pertenece').

3 – El cero no tiene precedente (para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{N}$ sg $\mathbf{x} \neq 0$)
Esto significa que la sucesión numérica natural empieza en cero.

4 – De la igualdad sg $\mathbf{x}$ = sg $\mathbf{y}$ se deduce que: $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

5 – **Axioma de inducción completa**. Si de un conjunto **C** de números naturales se sabe que cumple las dos condiciones siguientes:

i) El número natural cero pertenece al conjunto **C** $(0 \in \mathbb{N})$.

ii) Si un número natural $\mathbf{x}$ pertenece al conjunto **C** se cumple que el siguiente de $\mathbf{x}$ pertenece también a **C**.

Entonces, todos los números naturales pertenecen al conjunto **C**.

Estos cinco axiomas son las proposiciones que caracterizan esencialmente a lo que se llama *sucesión numérica natural* y se toman como definición de los números naturales.

3 – NÚMEROS ENTEROS

Los números naturales no permiten resolver todas las posibilidades operativas. Esta limitación llevó a la necesidad de crear otros conjuntos numéricos que atendieran este problema.

La resta entre números naturales sólo es posible si el sustraendo es menor o igual al minuendo. Sin embargo, la práctica de trabajo exige un conjunto numérico en donde la resta sea siempre posible. Así, se hizo necesario crear un nuevo conjunto numérico, que se llamó *números enteros*. Ellos comprenden a los enteros positivos, el cero (naturales) y los enteros negativos.

Conjuntos numéricos

En este capítulo solamente se intenta recordar al estudiante los diferentes conjuntos numéricos, sus nombres, sus interrelaciones.

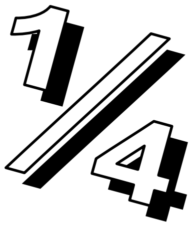
En ningún caso se pretende definirlos rigurosamente.

Téngase en cuenta que:

Se da una introducción a la axiomática del número real, en el capítulo 16.

Se estudian los números complejos en el capítulo 17.

4 – NÚMEROS RACIONALES



Si bien la creación del conjunto de los números enteros permite la resta entre cualesquiera de ellos, no sucede lo mismo con la división. Por ejemplo, si 6 dividido 2 es igual a 3 y el resultado es un número entero, no hay ningún número entero que sea el resultado de 6 dividido 5.

Este problema llevó a la creación del conjunto de los *números racionales*, en el que la división es siempre posible, con la única excepción del divisor cero.

El conjunto de los números racionales comprende a los números enteros y a los fraccionarios positivos y negativos.

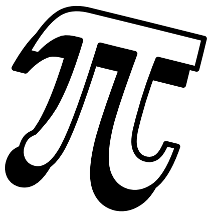
Algunos ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{4}{5}, \quad 7, \quad -3 \\[2ex] 0.35 = \dfrac{35}{100} = \dfrac{7}{20} \\[2ex] -0.\hat{2} = -0.222222\ldots = -\dfrac{2}{9} \end{array}\right\} \text{Todos ellos son números racionales.}$$

5 – NÚMEROS REALES

La necesidad de los *números reales* se presenta cuando se intenta efectuar algunas operaciones como la radicación, que entre los racionales no tiene solución en todos los casos. Así, $\sqrt{2}$ no existe en el conjunto de los números racionales, pues no existe ningún racional cuyo cuadrado valga 2.

De modo que, como sucede con la resta entre naturales o con la división entre enteros, se está frente a una operación que carece de sentido en un conjunto numérico para ciertos valores de la variable.



¿Será cierto?

Responder «verdadero» o «falso», y justificar la respuesta.

1) **Un número fraccionario es un número racional.**

2) **Un número entero es un número racional.**

3) **Un número real es un número racional.**

4) **Un número cuya representación decimal contiene infinitas cifras no periódicas, es un número racional.**

5) **Un número natural es un número entero.**

6) **El número 0.5617 es un número racional.**

7) **π no es un número real.**

8) **El número 0.11111111 no es un número racional.**

9) **El producto de dos números racionales es un número racional.**

10) **La suma de dos números irracionales es irracional.**

Véanse los resultados en la página 469.