

II. Proyecto de exploración matemática para estudiantes de secundaria: Las fracciones egipcias

Un Legado de la Antigüedad: Las Fracciones Egipcias

El papiro de Rhind, famoso documento que contiene tablas y anotaciones matemáticas pertenecientes a varias civilizaciones egipcias del segundo siglo antes de Cristo, contiene una colección de curiosos e interesantes problemas relacionados con las fracciones. El documento contiene entre otras cosas una tabla que expresa las fracciones de numerador 2 (cuyos denominadores varían de 3 a 99) como sumas de fracciones de numerador 1. El papiro también describe métodos para resolver (por x) ecuaciones de la forma $(a/b)x = c$ y algoritmos numéricos para aproximar las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones. Además, en el papiro se presentan datos sobre las series aritméticas y las series geométricas, y se tocan temas geométricos.

Con la curiosa excepción de la fracción $2/3$, los egipcios del segundo siglo antes de Cristo sólo utilizaban la notación fraccional para escribir fracciones de la forma $1/n$, siendo n un entero positivo. Por tal motivo las fracciones de este tipo han pasado a conocerse en los tiempos modernos como *fracciones egipcias*. Se alega que el siguiente problema (notación moderna) aparece en el papiro. ¿Cómo podemos dividir equitativamente 6, 7, 8 ó 9 hogazas de pan entre 10 hombres? Las contestaciones que aparecen en el papiro son las siguientes:

$$1/2 + 1/10$$

$$1/3 + 1/3 + 1/30$$

$$1/3 + 1/3 + 1/10 + 1/30$$

$$1/3 + 1/3 + 1/5 + 1/30.$$

Las sumas indicadas representan descomposiciones en fracciones egipcias de las fracciones $6/10$, $7/10$, $8/10$ y $9/10$ respectivamente. Esto significa en particular que $6/10 = 1/2 + 1/10$, $7/10 = 1/3 + 1/3 + 1/30$ y así sucesivamente. Observemos primeramente que estas últimas relaciones resuelven en efecto el problema planteado en el papiro. Por ejemplo, la relación $6/10 = 1/2 + 1/10$ indica que podemos dividir equitativamente 6 hogazas de pan entre 10 hombres si damos a cada uno media hogaza más una décima de una hogaza. En general, estas soluciones al problema del papiro están lejos de ser únicas. Por ejemplo, las siguientes son descomposiciones en fracciones egipcias para $3/8$:

$$3/8 = 1/4 + 1/8$$

$$3/8 = 1/5 + 1/10 + 1/20 + 1/40.$$

Consideremos el siguiente "método gráfico" para expresar $7/10$ como una suma de fracciones egipcias (véase la Figura 1). Primeramente dividimos cada una de las siete hogazas de pan en dos partes iguales y repartimos un pedazo a cada persona. De esta manera nos sobran cuatro pedazos y cada persona habrá recibido entonces $1/2$ de una hogaza de pan. Continuamos el procedimiento dividiendo cada una de las cuatro piezas restantes en tres partes iguales y repartimos 10 de los 12 pedazos obtenidos $((1/3)(1/2) = 1/6)$ entre las diez personas. De esta manera cada persona recibe $1/2 + 1/6$ de una hogaza de pan. Finalmente dividimos los dos pedazos restantes en cinco partes iguales y damos una parte $((1/5)(1/6) = 1/30)$ a cada quién, de manera que cada persona tiene $1/2 + 1/6 + 1/30$ de hogaza de pan.

Dejamos al lector la explicación de otra descomposición de la fracción $7/10$ como una suma de fracciones egipcias empleando los dos esquemas de división descritos en la Figura 2 (se debe obtener la descomposición $1/3 + 1/3 + 1/30$). Nos referiremos al problema de escribir una fracción dada como una suma de fracciones egipcias como "el problema de las fracciones egipcias". Los procedimientos ilustrados anteriormente son

ejemplos de algoritmos utilizados para la resolución del problema de las fracciones egipcias. Un algoritmo es un procedimiento que al seguirse al pie de la letra resulta en la resolución de un problema dado luego de un número finito de pasos. Quizás el algoritmo mas famoso (y uno de los más viejos) de la matemática es el algoritmo de Euclides, el cual nos permite hallar el divisor común mayor de dos enteros dados. Queremos expresar uno de los métodos descritos anteriormente en la forma de un algoritmo que sirve para resolver el problema de las fracciones egipcias. Supongamos que nos interesa repartir las hogazas de pan del problema del papiro de manera que en cada etapa del proceso *se utilice el número mínimo* de divisiones necesarias para dar a cada persona una de las partes divididas y tener quizás algunas partes sobrantes para dividir luego. Este es un procedimiento "mínimo" en la medida en que resulta en una descomposición que contiene *el número mínimo de sumandos posibles* (¡pero no necesariamente con los denominadores más pequeños posibles!). Veamos el procedimiento general.

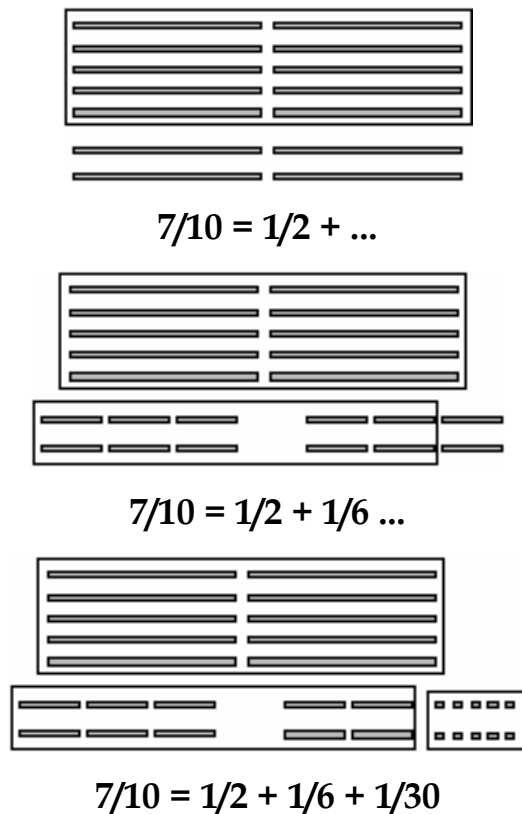


Figura 1

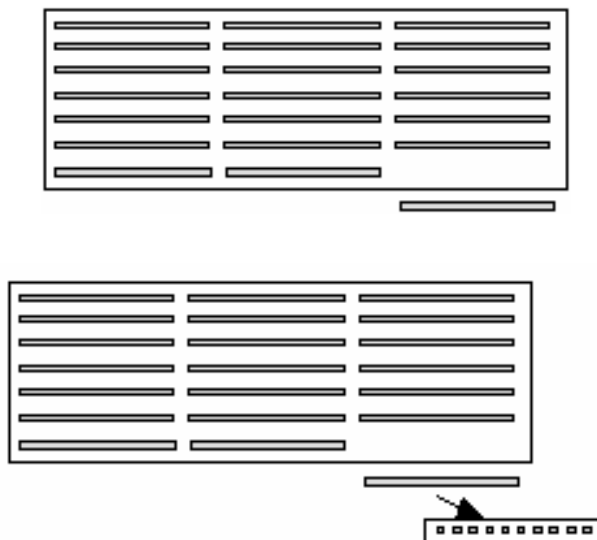


Figura 2

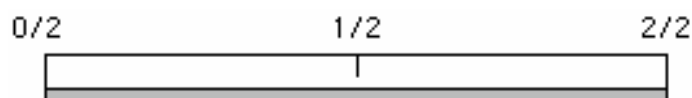
Algoritmo de sumandos mínimos: Para expresar una fracción a/b (a y b enteros positivos) como una suma de fracciones egipcias.

Paso 1 [Determinación del denominador] Hallamos el menor múltiplo de a que sea mayor o igual que b . Digamos que $a.k$ es tal múltiplo. En tal caso $1/k$ es una de las fracciones egipcias de la descomposición. (Por ejemplo, para $3/8$, el múltiplo más pequeño de 3 mayor o igual que 8 es 3×3 de manera que $1/3$ es una de las fracciones en la descomposición.)

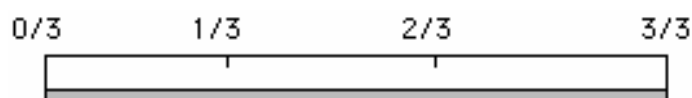
Paso 2 [Final del algoritmo] Si el múltiplo de a conseguido en el **Paso 1** es igual al entero b termina el procedimiento. (Si $a.k = b$ entonces $a/b = 1/k$ ya es una fracción egipcia.)

Paso 3 [Ajuste] Ahora aplicamos el procedimiento anterior a la fracción $a/b - 1/k = (ak - b)/bk$. Es decir, tomamos $ak - b$ como el nuevo valor de a y bk como el nuevo valor de b , y continuamos en el **Paso 1**. (En el caso de $3/8$ tenemos $3/8 - 1/3 = 1/24$ y tomaríamos 1 como el nuevo valor de a y 24 como el nuevo valor de b .)

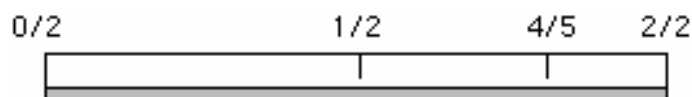
Resulta evidente que el proceso termina luego de un número finito de pasos ya que la cantidad $ak-b$ decrece hasta llegar a uno. Este procedimiento se conoce en la literatura como el *Algoritmo de Fibonacci-Sylvester*. Veamos una forma geométrica de visualizar la ejecución del procedimiento descrito. Supongamos que n es un cierto entero positivo y que marcamos en una regla de largo 1 todas las fracciones $1/n, 2/n, 3/n, \dots, n/n$. Así habremos de obtener lo que llamaremos la regla $1/n$. Por ejemplo, la siguiente es la regla $1/2$:



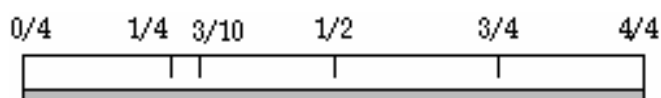
Nótese que la marca correspondiente a $1/2$ divide la regla $1/2$ en dos porciones iguales y las marcas correspondientes a $1/3$ y $2/3$ dividen la regla $1/3$ en tres partes iguales.



En general, si n es un entero positivo, las marcas correspondientes a las fracciones $1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ dividen la regla $1/n$ en n partes iguales. Un poco de reflexión nos muestra que es posible frasear el algoritmo anterior en términos de las reglas $1/n$. El algoritmo asevera que si n es el entero más pequeño tal que la fracción a/b queda en el *segundo* intervalo de la regla $1/n$ (es decir si $1/n \leq a/b < 2/n$), entonces $1/n$ es un sumando de la descomposición en fracciones egipcias de a/b . Veamos cómo, utilizando reglas $1/n$, podemos obtener gráficamente la descomposición en fracciones egipcias de $4/5$. Primero localizamos la fracción $4/5$ en la regla $1/2$:



Por lo tanto, vemos que $1/2$ es una de las fracciones en la descomposición de $4/5$. Continuaríamos ahora con la fracción $3/10 = 4/5 - 1/2$, localizándola en la regla $1/4$:



Por consiguiente $4/5 = 1/2 + 3/10 = 1/2 + 1/4 + (3/10 - 1/4) = 1/2 + 1/4 + 1/20$. Como $1/20$ es una fracción egipcia, es fácil ver que el proceso termina de manera que

$$4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20.$$

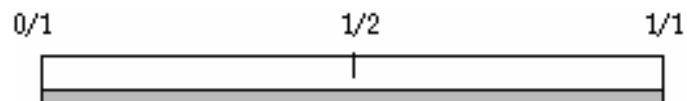
Fracciones de Farey

A continuación describimos un interesante y curioso procedimiento que también resuelve el problema de las fracciones egipcias. El lector podrá comprobar fácilmente que si a/b y c/d son fracciones con numeradores y denominadores positivos y $a/b < c/d$, entonces $(a+b)/(c+d)$ es una fracción entre a/b y c/d , es decir, $a/b < (a+b)/(c+d) < c/d$. Así pues $6/11$ es una fracción entre $1/3$ y $5/8$ y $11/14$ es una fracción entre $5/7$ y $6/7$. Comencemos examinando la regla unitaria como se ilustra a continuación.



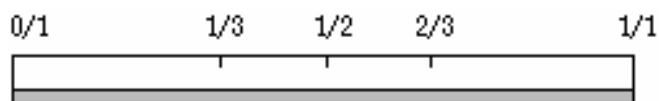
Primera regla de Farey

Si colocamos en la regla las fracciones cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones indicadas en la regla y cuyo denominador es la suma de los denominadores de tales fracciones, tendríamos:



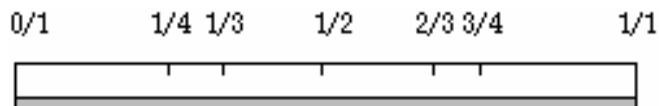
Segunda regla de Farey

Ahora colocamos las fracciones que se forman de la misma manera (sumando numeradores y denominadores) y cuyos denominadores son a lo sumo 3.



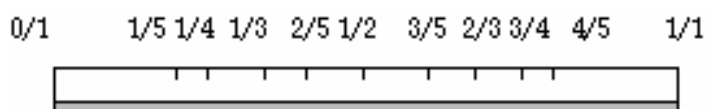
Tercera regla de Farey

Nótese que hemos representado todas las fracciones reducidas de denominador menor o igual a 3. Repitiendo el procedimiento una vez más y colocando las fracciones que faltan de denominador menor o igual a 4 tenemos:



Cuarta regla de Farey

Nótese que hemos representado todas las fracciones *reducidas* de denominador menor o igual a 4. Además, todas las fracciones representadas han aparecido en *su orden natural* en la recta numérica. Nos habremos de referir al diagrama que se obtiene en el paso n de esta construcción como la n -sima regla de Farey. La quinta regla Farey aparece a continuación:



Quinta regla de Farey

Nótese que de acuerdo al procedimiento descrito hemos colocado en esta última regla sólo las fracciones intermedias de denominador menor o igual que 5. Así pues, no hemos colocado a $2/7$ como fracción entre $1/4$ y $1/3$ ni a $5/7$ entre $2/3$ y $3/4$. En general la n -ésima regla de Farey contiene todas las fracciones propias, reducidas, con denominadores menores o iguales que n .

Veamos cómo podemos utilizar las fracciones de Farey para obtener descomposiciones de fracciones en fracciones egipcias. La propiedad fundamental de las reglas de Farey que las hacen particularmente relevantes al problema de las fracciones egipcias es precisamente que la diferencia entre dos fracciones consecutivas en una regla de Farey es una fracción egipcia. Por ejemplo, si calculamos todas las diferencias entre las fracciones consecutivas de la quinta regla de Farey obtenemos:

$$1/5, 1/20, 1/12, 1/15, 1/10, 1/10, 1/15, 1/12, 1/20, 1/5.$$

Suponga que tenemos una fracción reducida a/b y que la colocamos sobre la b -ésima regla de Farey; nótese que a/b es uno de los puntos de la regla. Una vez colocada ésta sobre la regla, escogemos la primera fracción c/d de la regla, menor que la fracción a/b . Como la diferencia entre a/b y c/d es una fracción egipcia, obtenemos la descomposición $a/b = c/d + 1/q$, donde c , d y q son enteros positivos y d es menor o igual que b . Luego repetimos el procedimiento con c/d en lugar de a/b , y continuamos repitiéndolo hasta tanto se obtenga la descomposición deseada. He aquí el procedimiento:

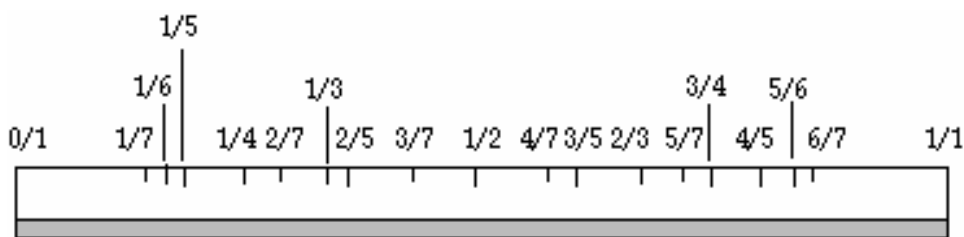
Procedimiento: Para escribir la fracción reducida a/b (a , b enteros positivos, $a < b$) como una suma de fracciones egipcias.

Paso 1 [Colocación en la regla] Determinar la fracción mayor c/d en la b -ésima regla de Farey tal que $c/d < a/b$. Escribir $a/b = c/d + 1/q$ para algún entero positivo q . Entonces $1/q$ es uno de los términos de la descomposición.

Paso 2 [Final del algoritmo] Si $c=1$, $1/d$ es un término de la descomposición y termina el algoritmo.

Paso 3 [Ajuste] Tomar c como el nuevo valor de a y d como el nuevo valor de b . Continuar en el Paso 1.

Se puede observar que los denominadores (y por consiguiente, los numeradores) disminuyen en tamaño a medida que el procedimiento progresa. Por lo tanto, el procedimiento termina luego de un número finito de pasos. Ilustramos el procedimiento mediante un ejemplo. Suponga que queremos hallar una descomposición en fracciones egipcias para $3/7$. A continuación se presenta la séptima regla de Farey:



De acuerdo al procedimiento descrito, vemos en la regla que $3/7 = 2/5 + (3/7 - 2/5) = 2/5 + 1/35$. Ahora localizamos la fracción $2/5$ en la quinta regla de Farey:



Aplicando el procedimiento a la fracción $2/5$, vemos de la regla que $2/5 = 1/3 + (2/5 - 1/3) = 1/3 + 1/15$. Por consiguiente $3/7 = 1/3 + 1/15 + 1/35$ es una descomposición de $3/7$ en fracciones egipcias. El lector podrá verificar fácilmente que si aplicamos a $3/7$ el primer método descrito (Algoritmo de sumandos mínimos) para hallar una descomposición en fracciones egipcias, obtenemos la siguiente descomposición: $3/7 = 1/3 + 1/11 + 1/231$.

Un Algoritmo Algebraico

A continuación presentamos un curioso procedimiento algebraico que nos permitirá obtener nuevas descomposiciones de fracciones arbitrarias en fracciones egipcias. Para esto necesitaremos referirnos un poco a la idea de grupo, una de las ideas centrales del álgebra. Decimos que un grupo consiste de un conjunto G y una operación en G , \star , ce-

rrada, tal que \star es asociativa, existe una identidad u en G respecto a \star y cada elemento a de G tiene un inverso, es decir, existe un elemento b en G tal que $a\star b = b\star a = u$. En el caso que $a\star b = b\star a$ para todos los elementos a y b de G , decimos que G es un grupo *comutativo* o *abeliano*. El conjunto Z de los enteros forma un grupo bajo la operación usual de la suma. La identidad de este grupo es el cero y el inverso de un elemento dado es el elemento opuesto o su negativo. El conjunto Q^* , consistente de los números racionales excepto el cero, forma un grupo bajo la multiplicación usual de fracciones. La identidad en este caso es el 1 y el inverso de una fracción a/b es b/a . Supongamos ahora que a es un entero mayor que 1 y consideremos el conjunto de todos los enteros positivos menores que a que son relativamente primos con a , es decir, que no tienen factores comunes con a excepto el 1. Es fácil ver que este conjunto se convierte en un grupo si la operación \star es la de "multiplicación módulo a ". El producto de dos números módulo a es el residuo obtenido al dividir el producto usual por a ; así pues el producto de 5 y 6 módulo 25 es 5. Se dice que el conjunto de todos los enteros positivos menores que 25 y relativamente primos a 25, $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24\}$, forma el grupo reducido de residuos módulo 25. Nótese que 2 es el inverso de 3 módulo 25. ¿Cuál es el inverso de 14? El número de elementos de G se conoce como $\phi(25)$ (se lee "fi de 25") que representa el número de enteros positivos menores que 25 que son relativamente primos a 25. La función ϕ , la cual asigna a un entero positivo b mayor que 1 el número de enteros positivos menores que b que son relativamente primos a b , se conoce en la literatura como la "función ϕ de Euler".

Veamos cómo podemos aplicar estas ideas al problema de determinar una expansión en fracciones egipcias para una fracción dada. Considere la fracción a/b donde a y b son enteros positivos, relativamente primos y $a < b$. Suponga que $c < b$ es el inverso de a módulo b . Entonces $ac - 1$ es divisible por b de manera que para algún entero positivo q tenemos $ac - 1 = qb$, es decir $ac = 1 + qb$. De aquí vemos que $a/b = 1/bc + q/c$. Como $1/bc$ es una fracción egipcia, si q no es 1 podemos continuar aplicando el procedimiento a la fracción q/c .

Se puede demostrar que este procedimiento resulta en una descomposición de a términos o menos. A modo de ilustración probamos el algoritmo con la fracción $13/21$. Primeramente, aplicando el Paso 1 determinamos el inverso de 13 módulo 21, es decir el entero positivo $c < 21$ tal que $13c - 1$ es divisible por 21. Luego de varios intentos descubrimos que $c = 13$ de suerte que $13/21 = 1/(13)(21) + 8/13 = 1/273 + 8/13$. Aplicamos ahora el mismo procedimiento a la fracción $8/13$. En este caso $8(5) = 1 + 3(13)$ de manera que $13/21 = 1/273 + 8/13 = 1/273 + 1/(13)(5) + 3/5 = 1/273 + 1/65 + 3/5$. Aplicando este mismo procedimiento a la fracción $3/5$ tenemos, $3(2) = 1 + 5(1)$ de suerte que $13/21 = 1/273 + 1/65 + 3/5 = 1/273 + 1/65 + 1/2 + 1/(5)(2) = 1/273 + 1/65 + 1/2 + 1/10$. Por lo tanto,

$$13/21 = 1/2 + 1/10 + 1/65 + 1/273.$$

Recordemos que el procedimiento de las reglas de Farey resultó en la descomposición

$$13/21 = 1/2 + 1/10 + 1/90 + 1/234 + 1/273.$$

El lector puede verificar que el algoritmo de sumandos mínimos resulta en la descomposición

$$13/21 = 1/2 + 1/9 + 1/126.$$

Algunas preguntas interesantes y observaciones sobre las fracciones egipcias:

1. Qué fracciones admiten la misma expansión en fracciones egipcias al aplicar el algoritmo de los sumandos mínimos y el algoritmo de Farey.

2. Empleando la relación $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ se pueden hallar descomposiciones

de fracciones comunes en fracciones egipcias. Por ejemplo,

$$2/11 = 1/11 + 1/11 = 1/11 + 1/12 + 1/132.$$

3. Hay otros métodos para resolver el problema de las fracciones egipcias. Por ejemplo, por el método de sumandos mínimos se obtiene

$$7/17 = 1/3 + 1/13 + 1/663.$$

Por el método de las reglas de Farey se obtiene

$$7/17 = 1/3 + 1/15 + 1/85.$$

En las referencias [B. Wohlgemuth] se discute un algoritmo llamado “factorial” mediante el cual se obtiene la descomposición

$$7/17 = 1/3 + 1/17 + 1/51.$$

4. Se ha conjeturado que las fracciones de la forma $4/n$ y $5/n$ se pueden descomponer en sumas de fracciones egipcias con tres o menos sumandos.

Referencias

Las actividades aquí descrita se han tomado de las siguientes fuentes:

Campistrous, L. A., López, J. M. (2001), La calculadora como herramienta heurística, Revista Uno, Número 28, páginas 84-99.

Lopez, J. M. (2002) Problemas de investigación matemática para la escuela secundaria, Fascículo de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM), Universidad de Puerto Rico, Río Piedras